

重力场源正交分解的有关问题评注*

李 斐

中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430070;
武汉大学测绘遥感信息工程国家重点实验室, 武汉 430072

摘要 通过给出重力场源正交分解定理的各种数学表示及其几何图示以及对其物理内涵的深入剖析, 推及至对物理大地测量学反问题研究的相关进展、主要理论方法及存在的问题进行评注. 着重分析了正交分解定理的具体实现、调和性场源的实际应用中的不确定性等问题. 从场源正交分解在物理大地测量学与地球物理学结合中的作用角度, 论证了如下结论: 1. 重力场源正交分解的存在性及可行性; 2. Newton算子相当于一单通滤波器; 3. 任何形式的引力场源或扰动场源对外部重力场的贡献等效于调和性场源对外部场的贡献; 4. 外部重力场并非只能反演调和性场源; 5. 正交分解定理为外部场赋值提供了一种简单的赋值转换元素; 6. 正交分解为地球物理重力反演提供了一个重要约束.

关键词 物理大地测量学反问题 场源正交分解 正交分解定理调和性场源 零外部位密度

重力场源的正交分解, 是物理大地测量学反问题研究的理论核心之一. 由于这一理论揭示了重力场源的一些基本特性, 因此, 关于物理大地测量学反问题的诸多研究是围绕这一定理展开, 或直接或间接以其做为理论依据. 然而, 物理大地测量学研究的主要目的在于求解外部场结构, 往往在满足对外部场赋值模式及精度的要求下, 对所涉及的场源特性并不严格强调其物理实在性, 如埋藏质点法、Bjerhammar球以及虚拟单层密度等. 随着物理大地测量与地球物理学相互结合的逐渐深入, 一些物理大地测量工作者试图将研究范畴拓展至地球内部, 并运用物理大地测量学关于重力场结构分析的理论、方法及相关结果, 研究和分析重力场与场源的响应关系以及地球内部实际场源密度分布的性质和特征, 并为地球物理反演提供有意义的几何及物理上的依据和约束. 由此, 正交分解定理成为了理论焦点之一. 但是, 由于正交分解定理源于物理大地测量, 且其数学表达上具有相当的抽象性, 尤其是涉及地球物理的相关描述时, 容易造成一定程度的难以理解和不准确性. 基于上述原因, 本文通过对正交分解定理的数学描述的解析, 着重分析其物

理实质及意义. 尤其是针对实际应用面临的困难及概念上的不确定性, 结合物理大地测量反问题研究的一些主要方法及相关进展, 通过论证和评注, 进一步从物理大地测量学反问题研究的角度为物理大地测量与地球物理结合提供客观的依据.

1 重力场源正交分解的数学描述及表示

1.1 正交分解的表述

重力场源的正交分解是以正交分解定理加以描述的, 其数学表述为: 对应于 Newton算子 N 的带核 Hilbert空间 $L^2(N) = \{\rho | N\rho = V_e\}$ 能够被正交分解成如下形式

$$L^2(N) = \text{Ker}(N) \oplus H_{\Delta}(N), \quad (1)$$

其中 $\text{Ker}(N) = \{\rho_0 | N\rho_0 = 0\}$; $H_{\Delta}(N) = \{\rho_H | \Delta\rho_H = 0\}$; ρ 为场源密度; V_e 为外部引力位; $N\rho = V_e$ 为万有引力公式; \oplus 表示直和; Δ 为 Laplace算子.

从场源密度结构分析的角度, 该定理还可以表述成为:

2001-06-01 收稿, 2001-07-17 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 49774212)和测绘科技发展基金(批准号: 98009, 20010103)资助项目

E-mail: fli@wtusm.edu.cn

对应于给定外部引力位 V_e , Newton 算子方程的属于 $L^2(N)$ 空间的解 ρ 可以被分解成如下形式

$$\rho = \rho_0 + \rho_h, \quad (2)$$

其中 $\rho_0 \in Ker(N)$ 为 Newton 算子方程的齐次解; $\rho_h \in H_\Delta(N)$ 为 Newton 算子方程的特解.

一个更为通俗、直观的表述为: 给定外部引力场, 其对应的地球内部密度分布可以被正交分解成两部分: 一部分是调和性密度; 另一部分是零位密度. 这里的零位密度是指产生零外部引力位的密度或并不产生外部引力位的密度.

1.2 正交分解定理的几种证明方式

在数学上, 正交分解定理可以看作是对第 1 类 Fredholm 积分方程(Newton 万有引力方程求逆)的特解与通解的分析与推证. 但是物理大地测量学工作者是从讨论重力场与场源的响应关系角度予以论述和证明的. 如 Marussi 与 Moritz 等是从零外部位密度的角度加以论述的^[1,2], Sanso 等^[3,4]从地球密度模的选择角度予以证明的. 而在文献 [5] 中, 则是直接运用 Green 公式和 Gauss 公式, 并从场源密度的谱分析入手, 给出较为直观的证明.

1.3 正交分解定理的几何图示

由于正交分解定理的数学描述较为抽象, 因此主要是作为一个场与场源响应关系特征分析的理论结果. 而从数学表示上去深入理解这一定理的实质, 则较为困难. 为了更加直观的表述这一理论结果, 我们给出这一定理的几何图示.

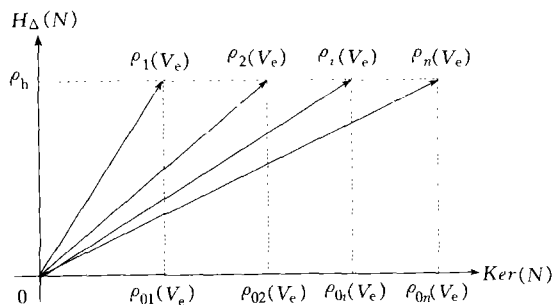


图 1 正交分解定理的几何图示

图 1 中, $\rho_i(V_e), i = 1, 2, \dots$ 表示对应于同一外部引力位 V_e 的通过不同反演方法得到的各种场源分布. 可以看出: 由于正交分解性, ρ_i 可以由正交空间 $Ker(N)$ 及 $H_\Delta(N)$ 中的分量(投影)所表示, 并且各个 ρ_i 在空间 $Ker(N)$ 中的投影分量 ρ_{0i} 可

以相互不一样, 而它们在 $H_\Delta(N)$ 中的投影分量 ρ_h 却是与 V_e 一一对应的. 同时, 属于空间 $H_\Delta(N)$ 中的调和场源 $\rho_h(V_e)$ 是所有 $\rho_i(V_e)$ 中距离原点最短的一个.

从正交分解定理的几何图示, 还可以直接得到场与场源响应关系的一些基本性质如下:

- (1) 对应同一外部引力位 V_e , 零外部位密度 ρ_0 是不惟一的.
- (2) 调和性场源 ρ_h 与外部引力位 V_e 一一对应.
- (3) 调和性场源 ρ_h 在所有对应同一外部引力位 V_e 的场源分布 ρ_i 中具有最小模.

2 正交分解定理的实际应用

2.1 场源正交分解的实现

正交分解定理被称作物理大地测量学反问题研究的理论核心. 然而, 这一定理除了从理论上揭示了引力场与场源的响应关系之外, 一直未见有效的实际应用. 原因在于其理论上的抽象性及其解析表达模式的缺乏. 为此, 文献[6]给出了一种基于球谐函数表达的拟调和多项式场源逼近模式. 该多项式的每一项为场源的径向坐标与球谐函数之积, 这种形式可以实现正交分解定理的直接应用. 即, 对于场源密度函数 ρ , 当以如下多项式加以逼近时,

$$\rho(r, \theta, \lambda) = \sum_{k=0}^N r^k \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_{nmk} \left(\frac{r}{R} \right)^n \bar{Y}_n(\theta, \lambda) \right] = \sum_{k=0}^N r^k u_{hk}(r, \theta, \lambda), \quad (3)$$

关于场源的正交分解可以被具体实现. 式中 r 为场源的径向坐标; R 为地球平均半径; (θ, λ) 为场源的余纬和经度; $\bar{Y}_n(\theta, \lambda)$ 为正规谐函数; α_{nmk} 为谐函数系数; 而 $r^k u_{hk}$ 即为拟调和函数项.

2.2 拟调和多项式逼近模式的特征

由公式(3)所表示的拟调和多项式逼近模式是以球谐函数为基础、运用代数多项式逼近原理推演而来的. 从多项式逼近的角度而言, 公式(3)适用于任意连续或分段(层)连续的场源函数. 迄今, 这一模式已被用于调和性、二重调和性、拟调和性及重调和性的场源函数的正交分解^[7], 其结果都可以取公式(3)中的某一项(如 $k=0, 1, n$ 等)而直接获得. 然而, 所谓调和性、拟调和性场源等, 都是从物理大地测量角度以逐次逼近的方法对实际场源加

上的一些具有数学属性的约束而获得, 从重力场的表示与逼近角度, 具有一定的理论意义. 但是, 如果将其作为某些特定约束时, 其物理上的合理性目前尚不得而知. 一个显而易见的事实在于, 以多项式逼近的场源, 其整体性质应该取决于相应的代数多项式本身, 而非其中的某一项上. 这类似于外部扰动位的球谐展开模型中低阶项反映地球深部构造, 高阶项反映浅部特征. 由此意义上讲, 目前应用公式(3)中某一项或几项获得的各种具体解式只能理解为对实际场源的一种多项式逼近过程中的某阶次的表示. 若欲获取更加符合地球物理实际的场源表示, 则应该是各阶项的线性叠加. 据此, 必须寻求更多来自于数学性质、物理大地测量、地球物理的场与场源关系的描述或约束. 从数值逼近的原理出发, 约束和条件越多, 可求解的多项式的项数就越多, 逼近程度也将越合理, 物理内含也将越丰富. 因此, 正交分解定理的应用才会更具实际意义.

2.3 调和性场源的应用

在有关的物理大地测量学反问题研究中, 调和性场源或调和性扰动场源往往起着较为重要的作用. 在一些研究中, 调和性场源或调和性扰动场源被作为一种地球物理修正量甚至取代地球的质量异常而推及至对一些地球内部结构的描述之中¹⁾[8~12], 原因在于:

数学依据: 根据正交分解定理, 场源密度可以被正交分解成两部分, 一部分即为调和函数, 另一部分为零位密度部分. 根据定义, 零位密度对外部位不作贡献. 同时, 在物理大地测量学反问题的相关研究中, 诸多判定准则^[13]也已证明: 在 L^2 空间、 $H^{1,2}$ 空间以及密度分布具有最小能量(最稳定)和最小梯度情况下, 调和性场源分布具有最小模. 文献[5]也分别从 Tikhonov 正则化角度以及封闭解式与谱表示式的等价性角度证明了上述结论. 而从第1节中的图(1)也可以直观地看出这一性质. 进一步通过谱分析方法, 还可以给出外部引力位与调和性场源一一对应的求解公式^[6], 即设调和密度可以谐函数的形式展开成

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^i \sum_{j=0}^i P_{ij}(\cos\theta) [\rho_{ij}^c \cos j\lambda + \rho_{ij}^s \sin j\lambda], \quad (4)$$

式中 $P_{ij}(\cos\theta)$ 为 Legendre 函数. 将(4)式代入 Newton 万有引力公式, 并将距离倒数也以谐函数的形式展开后, 应用完全正规球谐函数的正交关系, 便得到引力位系数 C_{ij} 及 S_{ij} 与调和密度谐函数系数 ρ_{ij}^c , ρ_{ij}^s 之间一一对应关系式

$$\frac{4\pi R^3}{(2n+1)(2n+3)} M \rho_{ij}^c = C_{ij}, \quad (5a)$$

$$\frac{4\pi R^3}{(2n+1)(2n+3)} M \rho_{ij}^s = S_{ij}. \quad (5b)$$

物理依据: 调和性场源的一些基本性质在地球物理的某些现象中也能找到对应的定性解释. 例如, 通常认为当不考虑外在能量来源时, 地球在抗拒某些质量运移行为而趋于流体静力学平衡状态时, 其质量偏差(可视为扰动场源或密度异常)及侧向变化(变化率或梯度)应尽量小. 这种现象可以由数学上的密度分布具有最小模(对应 $H^{1,2}$ 空间)加以描述, 其所对应的场源密度分布函数正是调和函数^[13]. 另一个实例来自于对调和性场源的批评. 因为内部调和函数在边界上一般具有最大值, 这种性质的场源与通常的地球物理学中关于地球质量分布的描述存在明显矛盾. 但是, 当考虑调和性扰动场源或将质量异常视为调和函数时, 这种矛盾性却转化为相容性. 因为, 一般认为随着深度的增加, 地球质量所受到的压力增大, 因而质量分布也就应该越均匀. 从而使得质量异常与压力存在着一定的反比关系. 而地球内部压力在地球表面达到极小值. 因此, 调和性扰动场源或密度异常(在边界达极大值)与这一基本的地球物理现象也就不矛盾了.

2.4 调和性场源的不确定性及其理解

尽管有着各种解释, 但是, 一个关键的问题在于: 地球的质量分布与调和性场源之间的确定关系迄今并无实质性判据. 换言之, 正交分解定量只揭示了实际场源(或扰动场源)可以正交分解成调和部分与零外部位密度部分, 但并未给出两者之间的比例关系. 因此, 纯粹的以调和性场源来描述地球内部构造, 尚缺乏可靠的理论依据. 另一方面, 来自于地球物理的结果已告诉我们, 地球内部质量非连续, 存在着若干已知的物理或化学上的间断面. 实际场源既不连续, 更不调和. 这也使调和性场源受到质疑.

1) Tscherning C C. Some simple methods for the unique assignment of a density distribution to a harmonic function. Report No 213, Dept of Geod Sci Ohio Univ, 1974

但是,我们可以按如下方式来看待调和性场源:由于公式(5)表明了外部引力场与调和场源之间存在一一对应的关系,这意味着只要外部场存在,则必有对应的调和部分存在.因此,无论调和性场源在实际场源中所占比例多大,以其作为反映地球质量分布的一种趋势或零阶、一阶近似,则还是有着一一定的实际意义的.而若实际场源或质量异常与调和性场源差别较大,则意味着更多的地球物理实际信息将为零外部位密度所包含.从这一意义上说,物理大地测量学反问题的研究将不能仅限于调和性场源,而必须向非调和性场源拓展.

另外,从数学上分析,零位密度并未要求连续.如果能寻求一种有效的地球物理约束或方法以确定零位密度,调和场源与零位密度的直和将使得调和性场源与实际场源的非连续性之间的矛盾得以解决.

同时,若考虑扰动场源或密度异常,从物理实际出发,在反问题研究中所选择的正常场源接近物理实际或具有地球内部结构不连续的形式框架,则调和性扰动场源的合理性将得到进一步增强.可以设想,在构制正常场源时,如果能够对应于地球实际断面相应地设置若干特殊质量面,并作具体赋值,则以调和性扰动场源在增加必要的约束后去反演实际密度异常(相对于正常场源的偏差)时,对连续与否的要求便不再重要.当然,这是探索物理大地测量学与地球物理学相结合时所面临的另一个值得进一步探索的问题.

3 正交分解定理的物理意义分析

3.1 重力场源正交分解的存在性及可行性

迄今为止,除了文献[6]给出的拟调和多项式逼近模式之外,尚未见其他关于场源正交分解的解析表示.然而,由于拟调和多项式逼近模式是依据多项式逼近原理推证得到的,对于那些连续或分段连续的场源函数,理论上应可以由该多项式予以逼近和表示.因此,拟调和多项式的普适性及正交分解性便意味着场源正交分解的存在性及可行性.

3.2 Newton算子相当于单通滤波器

根据正交分解定理及零外部位的性质,将公式(2)代入Newton万有引力公式后

$$V_e = N\rho = N\rho_h + N\rho_0 = N\rho_h, \quad (6)$$

公式(6)意味着,如果将Newton算子看作一滤波

器,零位密度无论是否含有外部重力场或其他地球物理信息,都将无法通过Newton算子被重力观测所发现.只有正交分解意义下的调和性场源能够通过它而映射出外部场.由于外部引力位或扰动位亦为调和函数,因此,Newton算子N实际上是将场源中的调和部分映照成调和函数.可见,正交分解定理实质上刻划出Newton算子的固有特征.

3.3 任何形式的引力场源或扰动场源对外部场的贡献等效于调和性场源对外部场的贡献

尽管在许多情况下,并无必要也不容易直接对场源所正交分解,但是由于上述的Newton算子的滤波器性质使得人们可以理解出当任何场源通过Newton算子时,其零外部位密度被滤掉,剩下的部分必然是与其正交的调和性场源部分.从这一意义上讲,只有调和函数对外部场具有实质性贡献.而在通常的反问题或正演研究中,不同形式的场源对外部场的不同影响实质上是在正交分解意义下各种场源所含的调和部分的大小所决定的.

3.4 外部重力场并非只能反演调和性场源

尽管重力场观测量可以看作Newton算子作用于场源中调和性部分的结果,但是并不能由此认为通过外部重力场就只能反演出调和性场源.因为这是问题的两个方面,而不是一个一对一的逆映射问题.实际上,这正是有关对物理大地测量学反问题研究基本原理的彻底理解.因为正交分解定理的另一个实质性意义在于揭示了实际场源可以从数学上理解成为调和部分与零位密度部分的综合体.可是在探求场源的过程中,是依据数学上、物理大地测量学上以及地球物理学上的有关约束和对实际场源的一些基本性质的了解而构制由场到场源的映射算子.此时,外部重力场量只是作为一种映射过程中的输入量,而无法限定其所得到的映射结果必须是调和函数.显然,应用的约束条件越丰富、越合理,构制的场源映射算子也就越真实,由此得到的场源中除了调和部分之外,将含有更多的零外部密度的成份.地球物理中各种反演方法及结果以及文献[7]和[14]从物理大地测量角度构制的三重调和方程场源赋值模式和拟调和场性场源表示都是这一结论的具体例证.

3.5 正交分解定理为外部场赋值研究提供了一种简单的赋值转换元素

物理大地测量学关于场源研究的目的之一,在于

为方便外部扰动场的赋值和进行有效的边界观测量内插. 此时, 扰动场源实际上被作为实现上述目的的一种转换元素而一般不考虑其实际的地球物理意义. 由于零外部位密度意味着对外部扰动均无贡献的场源部分, 对它的考虑显然无助于上述目的实现. 从这一意义上讲, 正交分解定理恰恰将场源(或等效场源)中对外场“有用”的部分与“无用”的部分区别开来. 这将使得以外部扰动重力场赋值为目的的研究及建立相应的求解模型更加直接和简便.

3.6 正交分解定理为探求真实场源密度提供了一个重要约束

考虑如下3个与场源有关的性质:

(1) Newton 算子虽然不可逆, 但却是一个单映射算子. 即给定一个场源, 只能由其得到一个场量;

(2) 任何场源, 在正交分解的意义下, 只有它所具有的调和部分能够通过 Newton 算子映照出外部场量;

(3) 外部场与调和性场源之间存在一一对应关系.

应用以上3个性质, 可以证明如下结论: 无论何种形式的场源, 只要对应于同一外部场量, 则这些场源中的调和部分必须相等. 而它们之间的差别则体现在各自的零外部位密度之上. 这一结论, 无论是在物理大地测量学反问题研究还是地球物理反演探求真实扰动场源的过程中, 至少是一个十分重要的约束或检验手段. 因为外部重力场观测量是惟一的(在一定精度意义下). 而无论是依据什么方法反演或反解出的场源密度函数, 它们都必须满足一个共同的基本条件: 即将它们代入万有引力公式(Newton 算子)后得到的外部场必须与惟一的观测量相一致. 同时, 每一种场源中的调和部分也必须相一致. 这也说明了这样一个原理: 当判断所探求的各种场源密度结构的合理性与否时, 应更多的考虑其所包含的零外部位密度的合理性与否.

4 结束语

一个值得指明又显而易见的事实在于: 正交分

解定理从理论上揭示了重力反演的非惟一性. 从正交分解的角度, 关键在于场源中的零位密度的非惟一性. 这也说明: 要合理有效地确定场源密度分布, 必须是物理大地测量手段与地球物理手段的综合应用, 因为重力场只能惟一确定场源中的调和部分, 而零外部位部分的确定需要来自于其他地球物理约束. 这不仅为物理大地测量与地球物理的结合提供了一条途径, 也是值得引起地球物理学界予以关注的.

参 考 文 献

- 1 Marussi A. On the density distribution in bodies of assigned outer Newtonian attraction. *Bollettino Di Geofisica Teorica ed Applicata*, 1980, 22(86): 83
- 2 Moritz H. *The Figure of the Earth: Theoretical Geodesy and the Earth's Interior*. Karlsruhe: Wichmann, 1990. 143-160
- 3 Sanso F. Remarks on the inverse gravimetric problem. *Geophys Jour of the R A S*, 1988, 92: 505
- 4 Sanso F. et al. The inverse gravimetric problem in gravity modelling. *Geodetisk Institute, Modelleelse*, 1989, 58: 299
- 5 Li F. A research on density of null external potential. *Chinese J Geophys*, 1997, 40(4): 103
- 6 李 斐. 扰动重力场源的拟调和函数多项式逼近模式及其正交分解. *测绘学报*, 1998, 26(1): 50
- 7 Li F. Orthogonal decomposition to the resource of gravity field approximated by quasi-harmonics and multi-harmonics. *Acta Geodaetia et Carographica*, 1998, 27(2): 104
- 8 Sanso F. Choice of norm for the density distribution of the Earth. *Geophys J R Astr Soc*, 1986, 87: 123
- 9 林 舸, 等. 扰动重力场源计算及其大地构造学意义. *地球物理学报*, 1997, 40(2): 193
- 10 朱灼文, 等. 重力学内部边值问题. *中国科学, B 辑*, 1990, (2): 208
- 11 Tscherning C C, et al. A method for the construction of spheroidal mass distributions consistent with harmonic part of the Earth's gravity potential. *Man Geod*, 1981, 6: 218
- 12 Ballani L, et al. Global base functions for the mass density in the interior of a massive body. *Man Geod*, 1993, 18: 99
- 13 李 斐. 关于重力反演的几个判定准则. *地球物理学报*, 1998, 41(1): 90
- 14 Tscherning C C, et al. Quasi-harmonic inversion of gravity field data. In: *Proceedings of the 5th International Math. Geophys. Free Univ of Berlin*, 1987. Berlin: Braunschweig/Wiesbaden, 1987. 137